考研论坛----考研人的精神家园

线性代数

第一部分 矩阵 | 基础知识

矩阵等价
∃可逆C，满足
$A=C^{-1}BC$

1、线性方程组与矩阵

① 线性方程组 等价 ：两个线性方程组有相同的解集。

② 方阵
- 上三角矩阵
- 下三角矩阵
- 对角矩阵 $diag(d_1, d_2, \cdots d_n)$

注：只有方阵才有行列式的。

2、方阵的行列式

① 注意：“代数余子式”和“余子式”的区别 ⟹ “代数”的实质就是正负号。

如果连两者的定义都忘记了，请认真研究行列式的定义。☺

例：求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的第三列代数余子式之和。

解：$A_{13}+A_{23}+A_{33}$

$= 1\times A_{13}+1\times A_{23}+1\times A_{33}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

例：求矩阵 $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的第2列各元素余子式之和

解：$D_{12}+D_{22}+D_{32}+D_{42}$

$= (-1)\times A_{12}+1\times A_{22}+(-1)\times A_{32}+1\times A_{42}$

$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -14$

考研论坛

bbs.kaoyan.com

浙江大学

② 矩阵 A 经过初等变换：

$$\begin{cases} A\times R_{ij} : & |A| \Rightarrow -|A| \\ A\times R_{ij}(k) : & |A| \Rightarrow |A| \\ A\times R_i(\lambda) : & |A| \Rightarrow \lambda|A| \end{cases}$$

注：右乘是列变换，左乘是行变换。

③ 矩阵 $G=\begin{bmatrix} 0 & & g_1 \\ & g_2 & \\ g_n & & a \end{bmatrix}$ 的行列式 $|G|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n} g_i$

④ 例：

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\times (a-b)^{n-1}$$

$$= (a-b)^n \times (1+\frac{b}{a-b}\times n)$$

2个结论，最好记住。

加边法举例：

例：$\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ b & a_2 & \cdots & b \\ \vdots & & & \vdots \\ b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{加边}} \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1 & b & \cdots & b \\ 0 & b & a_2 & \cdots & b \\ 0 & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第一行}]{\text{各行减去}} \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ -1 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{各列}\times\frac{1}{a_i-b}\text{加到第一列上}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b} & b & b & \cdots & b \\ 0 & a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i-b)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b}\right)$$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

用同样的方法，可以计算下面两个行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1+b & b & \cdots & b \\ b & a_2+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i}\right)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)$$

大家可以通过上面的4个例子总结规律，相当实用。

⑤ 子行列式：并不是只有方阵才有子行列式。

$A_{m\times n}$，A的任一子方阵的行列式都是子行列式.（子式）

⑥ $|A^T|=|A|$

$R(A^T)=R(A)=R(AA^T)=R(A^TA)$

注意：第二个式子中后面两个"="只有在A为方阵时才成立。

回忆：
$$\begin{cases} R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\} \\ R(AB)\geq R(A)+R(B)-n \end{cases}$$
注意这个 n：$A_{mn}\cdot B_{nk}$

此时令 $B=A^T$ 即可得出 $R(A)\le R(AA^T)=R(A^TA)\le R(A)$ 且 $R(A)=R(A^T)$

$\Rightarrow$ $R(A^T)=R(A)=R(AA^T)=R(A^TA)$

⑦ 矩阵的行秩与列秩相同

⑧ 求矩阵的秩：

初等变换 $\Rightarrow$ 把行向量组变为一个与之等价的向量组。

这是因为，等价的向量组有相同的秩。

bbs.kaoyan.com

浙江大學

⑨ A.B为n阶方阵. AB为退化的⟺A.B至少有一个为退化的.

⑩ 奇数阶反对称行列式值为0.

反对称：$A=-A^T$，设A为n阶方阵. n为奇数.

两边取行列式 $|A|=(-1)^n|A^T|=-|A^T|$

又 $|A|=|A^T|$

故 $|A|=0$ （反对称矩阵主对角元素全为0）

⑪ 范德蒙行列式：

格式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ ← 第一行全为1. ← n-1 阶

应用：求 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$ 的值.

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} = (x-d)(x-c)(x-b)(x-a)(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$

原行列式为上式中 $(-1)\cdot x^3$ 的系数 $=(a+b+c+d)(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$

3. 矩阵代数.

① $AB=0$ 但A.B都不一定为0；

$AC=A$. 但C并不一定为E. A也不一定为0.

② 初等矩阵的概念：单位矩阵经一次初等变换而得到的矩阵.

R_{ij}, $R_i(\lambda)$, $R_{ij}(k)$；C_{ij}, $C_i(\lambda)$, $C_{ij}(k)$

考研论坛

考研论坛----考研人的精神家园

③ 三类初等矩阵的性质如下:

$(R_{ij})^T = R_{ij}$ $(R_{ij})^{-1} = R_{ij}$ $|R_{ij}| = -1$

$[R_i(\lambda)]^T = R_i(\lambda)$ $[R_i(\lambda)]^{-1} = R_i(\frac{1}{\lambda})$ $|R_i(\lambda)| = \lambda$

$[R_{ij}(k)]^T = R_{ji}(k)$ $[R_{ij}(k)]^{-1} = R_{ij}(-k)$ $|R_{ij}(k)| = 1$

$R_{ij} = C_{ij}$ $[R_{ij}(k)]^T = R_{ji}(k) = C_{ij}(k)$ $R_i(\lambda) = C_i(\lambda)$

④ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$

⑤ 理解: 转置伴随矩阵的来源: 是代数余子式的转置组成的.

$AA^* = A^*A = E\cdot|A|$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$; $A^* = A^{-1}|A|$; $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$; $|A^*| = |A|^{n-1}$

⑥ $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

其实, $A+B = A(A^{-1}+B^{-1})B = B(A^{-1}+B^{-1})A$

故 $(A+B)^{-1} = B^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1} = A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}B^{-1}$

特别地, 若 A. B均为正交阵($AA^T = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$; 同理 $B^T = B^{-1}$)

有, $A+B = A(A^T+B^T)B = B(A^T+B^T)A$

⑦ 解方程 $AX=B$ 的方法.

~~方法一~~: $[A,B] \xrightarrow[A^{-1}A=E,\ A^{-1}B=X]{\text{行初等变换, (左乘)}} [E, X]$

~~方法二~~: 解方程 $XA=B$ 的方法.

$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow[AA^{-1}=E,\ BA^{-1}=X]{\text{列初等变换. (右乘)}} \begin{bmatrix} E \\ X \end{bmatrix}$

⑧ $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{n\times m} & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & D_{m\times n} \end{vmatrix} = (-1)^{m\cdot n} |A||B|$$

⑨. $R\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = R(A)+R(B)$；

$R\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \geq R(A)+R(B)$，

⑩ 任一n阶矩阵A都可表示成一个对称阵与一个反对称阵之和.

$$A = \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T)$$

⑪ 若B为1矩阵（元素全为1的矩阵），则 $B^2 = nB$

⑫ 若 $a_{ij} = A_{ij} \Longrightarrow \begin{cases} |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 & \text{(i固定，即按某行展开) 若A非0，则} |A|>0 \\ \text{adj} A = A^T \end{cases}$

第一部分：矩阵	例题分析

1. $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} a_{11}b^{1-1} & a_{12}b^{1-2} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b^{2-1} & a_{22}b^{2-2} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn}b^{n-n} \end{vmatrix}$

求证：$A = B$.

分析：将B的第j列 $\times b^j$ $(1\le j\le n)$ 得

$$B = \frac{1}{b^{1+2+\cdots+n}} \times b^1\cdot b^2\cdot b^3\cdots b^n A = A.$$

2. 若 $a>b>c>0$，计算 $D_3 = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

解：$D_3 = \begin{vmatrix} a & a^2 & ab+a^2+ac+bc \\ b & b^2 & ab+b^2+bc+ac \\ c & c^2 & ac+bc+c^2+ab \end{vmatrix}$ （第一列乘以a. b. c加到第三列得到的）

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

拆分 $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^2 \\ b & b^2 & b^2 \\ c & c^2 & c^2 \end{vmatrix} + (ab+ac+bc)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0 + (ab+ac+bc)(c-a)(c-b)(b-a)$

3. 有以下不证明定理:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 的 n 个解: $x_1\ x_2 \cdots x_n$.

有 $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1\cdot x_2\cdots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$ 成立.

若 a, b, c 是 $x^3+px+q=0$ 的三个根 ($\Rightarrow a+b+c = -\frac{0}{1} = 0$)

则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = 0$

4. 矩阵拆分的应用.

① $D = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} \overset{\text{加边}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2-1 & 0-1 & 0-1 & 0-1 \\ 1 & & & \\ 1 & & \text{范德蒙 } n & \\ 1 & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 1 & & \text{范德蒙 } n & \\ 1 & & & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & \\ 1 & & \text{范德蒙 } n & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix}$

$= 2\times \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) - \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)\cdot \prod_{i=1}^{n}(x_i-1)$

② $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ b & b & \ddots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-b+b & a & \cdots & a \\ 0+b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \\ 0+b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-b & a & \cdots & a \\ 0 & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & b & \ddots & x_n \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & b & \ddots & x_n \end{vmatrix}$

(左下若是b, 右上若是a)

考研论坛

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大學

$$=(x_1-b)D_{n-1}+b\times\begin{vmatrix}1 & a & \cdots & a\\ 0 & x_2-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & b-a & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}$$ （⇐全都减去第一行）

$$=(x_1-b)D_{n-1}+b\times(x_2-a)(x_3-a)\cdots(x_n-a)$$

对称地 $D_n=(x_1-a)D_{n-1}+a\times(x_2-b)(x_3-b)\cdots(x_n-b)$

将其中一个 D_{n-1} 代入另一式中得

$$D_n=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a}\right) & a=b\text{时（与基础知识部分④一致）}\\ \dfrac{a\cdot\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)-b\cdot\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)}{a-b} & a\neq b\text{时.}\end{cases}$$

5、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是三维向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，若 $|A|=1$，则有 $|B|=$ <u>2</u>.

解：利用矩阵变换

$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+3\alpha_3,\ 2\alpha_2+8\alpha_3|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+3\alpha_3,\ 2\alpha_3|$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3|=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2\times1=2$$

6、若3阶行列式 $|A|=2$，则

$$\begin{vmatrix}3a_{31} & 2a_{21} & -a_{11}\\ 3a_{32} & 2a_{22} & -a_{12}\\ 3a_{33} & 2a_{23} & -a_{13}\end{vmatrix}=-6\times\begin{vmatrix}a_{31} & a_{21} & a_{11}\\ a_{32} & a_{22} & a_{12}\\ a_{33} & a_{23} & a_{13}\end{vmatrix}=-6\times(-2)=12$$

7. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是4维列向量，$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=n$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=m$，

则 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|=-n+m=m-n$

8、设 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$ 求 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$ 及 $A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

解：$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!\times(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})$$

$A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = |D_n| = n!\,(2-n)$$

9. n阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的所有代数余子式之和为：1

解：因为除第一行代数余子式之和为1以外，其余都为0.

10. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$

11. 已知3阶实矩阵A中，$a_{ij}=A_{ij}$，$a_{ij}\neq 0$，则 $|A|=$ ___1___

解：$a_{ij}=A_{ij} \Rightarrow A^T=A^* \Rightarrow |A|=|A|^{3-1}=|A|^2 \Rightarrow |A|=1$ 或 $|A|=0$

$\because |A|=\sum a_{ij}\cdot A_{ij}=\sum a_{ij}^2>0 \quad \therefore |A|=1$

12. 求分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$ 的逆，A.B可逆.

解1：$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=E \Rightarrow \begin{cases} X=A^{-1},\ Y=0 \\ Z=-B^{-1}CA^{-1},\ W=B^{-1} \end{cases}$

解2：$\begin{bmatrix} A & O & E & O \\ C & B & O & E \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} E & O & A^{-1} & O \\ C & B & O & E \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} E & O & A^{-1} & O \\ B^{-1}C & E & O & B^{-1} \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} E & O & A^{-1} & O \\ O & E & -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$

13. 设A为3阶矩阵，A的第2列加到第1列为B，再将B的第1列乘(-1)加到第2列为C，记 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $C=PAP^{-1}$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

解：由题意：（左乘行变换，右乘列变换）（三类初等矩阵的性质）

$R_{21}(1)A=B$，$B\cdot C_{12}(-1)=C$

则 $C=R_{21}(1)A\,C_{12}(-1)=R_{21}(1)A\,R_{21}(-1)$

而 $P=R_{21}(1)$，故 $P^{-1}=R_{21}(-1)$　$\therefore C=PAP^{-1}$

14. 设 $|A|\neq 0$，B是交换A的第i行与第j行得到的，下列不正确的为：④

① $|B|\neq 0$；　$\because |B|=-|A|$

② $AB^{-1}=R_{ij}$；　$\because B=R_{ij}A \Rightarrow B^{-1}=A^{-1}R_{ij} \Rightarrow AB^{-1}=R_{ij}$

③ 交换A^{-1}的第i列与第j列得到B^{-1}；　$\because A^{-1}C_{ij}=A^{-1}R_{ij}=B^{-1}$

④ 交换adj A的第i列与第j列得到adj B.

$\because A^{*}C_{ij}=A^{*}R_{ij}=|A|\cdot A^{-1}R_{ij}=|A|\cdot B^{-1}$

$B^{*}=B^{-1}\cdot|B|=-|A|\cdot B^{-1}$

$\therefore A^{*}C_{ij}=-B^{*}$ 而不是 $A^{*}C_{ij}=B^{*}$

15. A是m×n阵，B是n×m阵，则不正确的为：③

① $m>n$时 $|AB|=0$　② $m<n$时，$|AB|=0$.

③ $m>n$时 $|AB|\neq 0$　④ $m<n$时 $|AB|\neq 0$

解：$R(AB)\leq \min(R(A),R(B))$，且 $R(AB)\leq m$，$\because AB$为 $m\times m$ 阵

$m>n$时，$R(AB)\leq n$，$\therefore |AB|=0$

$m<n$时　$R(AB)\leq m$　$|AB|=0$ 或 $|AB|\neq 0$.

16. $|A|=\frac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^{*}|=|\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}|=|-\frac{2}{3}A^{-1}|=(-\frac{2}{3})^3|A^{-1}|$

A为3×3阵.

$=-\frac{8}{27}\times 2=-\frac{16}{27}$

bbs.kaoyan.com

浙江大学

17: A为非奇异（即 $|A|\neq 0$），α 为 n 维向量，b 为常数.

$$P=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{bmatrix}$$

① 求 PQ　② 证 Q 可逆 $\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha \neq b$

解：① $PQ=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A+|A|\alpha^T & -\alpha^T A^*\alpha+|A|b \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^{-1}\cdot|A|\cdot A+|A|\alpha^T & -\alpha^T A^{-1}|A|\alpha+|A|b \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha) \end{bmatrix}$$

证② Q 可逆 $\Leftrightarrow |Q|\neq 0$

而 $|PQ|=|P||Q|$ 得 $|A|\cdot|A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)=|Q|\cdot|A|$

$\therefore |Q|=|A|(b-\alpha^T A^{-1}\alpha)$

而 $|A|\neq 0$ $\therefore |Q|\neq 0 \Leftrightarrow b-\alpha^T A^{-1}\alpha\neq 0 \Leftrightarrow \alpha^T A^{-1}\alpha\neq b$

18. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B=P^{-1}AP$，则 $B^{2008}-2A^2=$ <u>3E</u>

解：$B^{2008}-2A^2=P^{-1}A^{2008}P-2A^2$　(*)

$A^2=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$　$A^4=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$　$\because$ 2008 可以将 4 除尽

$\therefore A^{2008}=E$.

$\therefore$ (*) $=E+2E=3E$

19. $A_1 A_2 A_3$ 分别是 l.m.n 阶方阵，则 $\begin{vmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_3 & & \end{vmatrix}=(-1)^{n(l+m)}\begin{vmatrix} & A_1 \\ A_2 & \end{vmatrix}\cdot|A_3|$

提示：换行.　$=(-1)^{ln+lm+mn}|A_1||A_2||A_3|$

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

20. A.B.C 都是方阵. $B=E+AB$. $C=A+CA$, 则 $B-C=$ E

解: $\left.\begin{aligned} B=E+AB &\Rightarrow B(E-A)=E \\ C=A+CA &\Rightarrow C(E-A)=A \end{aligned}\right\} \Rightarrow (B-C)(E-A)=E-A \Rightarrow B-C=E$

21. 已知 $Q=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ P是3阶非0阵. $PQ=0$, 则不正确的是: ③

① $t=6$时 $r(P)=1$ ② $t\neq 6$时 $r(P)=1$

③ $t=6$时 $r(P)=2$ ④ $t\neq 6$时 $r(P)=2$

解: ∵ $PQ=0$. ∴ $r(P)+r(Q)\leq 3$

又 P非0. ∴ $r(P)\geq 1$

$t=6$时 $r(Q)=1$ ∴ $1\leq r(P)\leq 2$ ∴ ① ④ √

$t\neq 6$时 $r(Q)=2$ ∴ $1\leq r(P)\leq 1$ ∴ $r(P)=1$ ∴ ② √

22. A是一个3×3阵, $|A|=3$, $A^*=A^T$, 若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}>0$, 则 $a_{11}=$ 1

解: $A^*=A^T \Leftrightarrow a_{ij}=A_{ij}$

∴ $|A|=a_{11}\times A_{11}+a_{12}\times A_{12}+a_{13}\times A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2=3$

∴ $a_{11}=\pm 1$ 又 $a_{11}>0$. ∴ $a_{11}=1$

23. 设 α.β是3维列向量, $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$. 求证: ① $r(A)\leq 2$ ② 若 α.β线性相关 $r(A)\leq 1$

证: ① $r(A)\leq r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)$

$\leq \min(r(\alpha),r(\alpha^T))+\min(r(\beta),r(\beta^T))\leq 1+1=2$

② 设 $\beta=k\alpha$.

则 $r(A)\leq r(\alpha\alpha^T+k^2\alpha\alpha^T)=r(\alpha\alpha^T)\leq 1$

考研论坛

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

24. $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ B满足 $ABA^*=2BA^*+E$，则 $|B|=\underline{\frac{1}{9}}$

解：$ABA^*=2BA^*+E \quad (\because A^*=A^{-1}\cdot|A|)$

$\Leftrightarrow |A|ABA^{-1}=2|A|BA^{-1}+E$ （右乘A）

$\Leftrightarrow |A|ABA^{-1}A=2|A|BA^{-1}A+A$

$\Leftrightarrow |A|AB=2|A|B+A \quad (\because |A|=3)$

$\Leftrightarrow 3AB=6B+A$

$\Leftrightarrow (3A-6E)B=A$ （两边取行列式）

$\Leftrightarrow |3A-6E||B|=3 \quad (|A-2E|=1)$

$\Leftrightarrow 3^3\times|A-2E||B|=3 \Leftrightarrow |B|=\frac{1}{9}$

25. $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=m$，则 $\begin{vmatrix}a_1+2b_1&a_2+2b_2&a_3+2b_3\\b_1+2c_1&b_2+2c_2&b_3+2c_3\\c_1+2a_1&c_2+2a_2&c_3+2a_3\end{vmatrix}=\underline{27m}$

解：原式 $=\left|\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2b_1&2b_2&2b_3\\2c_1&2c_2&2c_3\\2a_1&2a_2&2a_3\end{bmatrix}\right|$

$=\left|\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\right|=27m$

注：此题考察 aA 与 $|aA|$ 的区别

26. 两个矩阵等价 $\Leftrightarrow$ 可以化成相同的标准形 $\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}$. $(\because r(A)=r(B))$ 充要.

$\Updownarrow$

$\exists$ 可逆C，使 $A=C^{-1}BC$

两个向量组等价 $\Rightarrow r(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)=r(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)$

充分非必要

考研论坛

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

第二部分	向量	基础知识

1、n维向量

① 三向量 $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ 线性相关

$\Leftrightarrow R(\vec{a},\vec{b},\vec{c})<3 \Leftrightarrow |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}|=0 \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \Leftrightarrow$ 三向量共面

② 包含零向量的向量组必线性相关 ∵ 行列式肯定为0

③ $R(A)=R(AQ)$ Q可逆.

应用很广：已知 $\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3$ 线性相关，则 $\vec{b}_1=\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{b}_2=\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{b}_3=\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 线性相关.

∵ $[\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3]=[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

∴ 判断 $\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3$ 是否线性相关 $\Rightarrow$ 矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ 的秩是否为3 或行列式是否

④ $\vec{b}$ 可否由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2\ \vec{a}_3$ 线性表示的题型 $\Leftrightarrow R(A)\overset{?}{=}R(B)$

例：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&2\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

（列依次为 $\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{b}$）

∵ $R(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)=R(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{b})=3$

∴ $\vec{b}$ 可以由 $\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3$ 线性表示. 且表示方式由它的列决定.

$\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{a}_1-\frac{1}{2}\vec{a}_3+0\cdot\vec{a}_2=\frac{3}{2}\vec{a}_1-\frac{1}{2}\vec{a}_3$

⑤ 向量组的等价：两个向量组可以相互线性表示 $\Rightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$

⑥ 过渡矩阵的概念

向量组B可以由向量组A线性表示：$B=AC$，C为A到B的过渡矩阵

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow$

$R(B)\le R(A,B)=R(A)$ $\qquad$ 若C可逆，则 $R(AC)=R(A)=R(B)$

⑦ ∵ 行秩 = 列秩，∴ 判断一个向量组的秩就可以将其组成的矩阵进行行初等变换.

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

⑧ 向量组A和它的最大线性无关向量组等价 $\xrightarrow{\text{传递性}}$

向量组A的任何两个最大线性无关向量组等价.

⑨ $\begin{cases} R(A,B) \geq \max\{R(A),R(B)\} \\ R(A+B) \leq R(A,B) \leq R(A)+R(B) \\ R(A)+R(B)-n \leq R(AB) \leq \min\{R(A),R(B)\} \end{cases}$

∴ 若 $AB=0 \Rightarrow R(A)+R(B) \leq n$

⑩ $AX=0$ 的通解: $x=k_1x^1+k_2x^2+\cdots+k_sx^s$

(k_i为任意常数, $x^1\cdots x^s$为基础解系)

区分: 通解与基础解系的概念.

① 一般地, A经过行初等变换.再经过列初等变换才可以变为标准形 $N=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 其中 $r(A)=n$

若 $r(A)=n$, 即A可逆. 则只用行变换即可.

② 求 $AX=0$ 的基础解系 要将A化为 $\begin{bmatrix} E_r & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的形式.

基础解系的个数为 $n-r$. r为A的秩.

2. 向量空间

① 向量空间的定义: 对加法和数乘封闭的向量的集合

例如: $Ax=0$ 的解集 V 就是一个向量空间.

没有零向量不能构成向量空间. R^3中过原点的直线. 平面都是向量空间

R^n是最大的n维向量空间. 0向量是其中的一个子空间, 这是唯一一个由有限个向量构成的向量空间.

② $Ax=0$ 的解空间是由它的基础解系生成的向量空间.

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

③向量空间的基的定义：要满足

<1> $a^1, a^2, \cdots a^m$ 线性无关

<2> V中任何一个向量都可以由 $a^1, \alpha^2 \cdots \alpha^m$ 线性表示.

④ 向量组的维数：向量组中最大线性无关的向量个数

向量空间的维数：向量空间的基中所包含的向量的个数.

⑤ 基的变换与坐标变换

由 $a^1 a^2 \cdots a^n$ 及 $b^1 b^2 \cdots b^m$ 都是V的基，分别以A·B表示.

$B = AK$，K为A到B的过渡矩阵，K可逆.

若一向量 $\vec{\alpha}$ 在A下坐标为 $\vec{x}$，在B下坐标为 $\vec{y}$，即

$\vec{\alpha} = A\cdot\vec{x} = B\cdot\vec{y}$ 则有 $\vec{x} = K\vec{y}$ 或 $\vec{y} = K^{-1}\vec{x}$.

⑥ 规范正交基的格式

~~规范化~~：$b^1 = \alpha^1$，$b_2 = \alpha^2 - \frac{(a^2, b^1)}{(b^1, b^1)} \times b^1$；$b^3 = a^3 - \frac{(a^3, b^1)}{(b^1, b^1)} \times b^1 - \frac{(a^3, b^2)}{(b^2, b^2)} \times b^2$； ← 规范正交化

~~正交化~~：$\frac{b^1}{|b^1|}, \frac{b^2}{|b^2|}, \frac{b^3}{|b^3|} \cdots$ ← 标准化

⑦ 正交矩阵 $A = [a^1 a^2 \cdots a^n] \Leftrightarrow a^1 a^2 \cdots a^n$ 为 R^n 的规范正交基

$A\cdot A^T = A^T\cdot A = E$

⑧ 若两个向量组等价（即可以互相线性表示），则它们的向量空间相等.

⑨ 正交矩阵： $A\cdot A^T = A^T A = E$

<1> $|A|^2 = 1$，$|A| = \pm 1$

<2> $A = (\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_n)$，$\gamma_1 \cdots \gamma_n$ 是 R^n 的标准正交基

<3> A^K，A^{-1} A^* 也是正交的

<4> A,B 正交 ⟹ AB也正交

<5> 两个标准基的过渡阵是正交阵.

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

第二部分 向量 例题分析

1. 设 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T$, $\alpha_2=(2,7,1,3)^T$, $\alpha_3=(0,1,-1,2)^T$, $\beta=(3,10,a,4)^T$

a取何值，β可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解1: 令 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$

即 $\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 4x_1+7x_2+x_3=10 \\ x_2-x_3=a \\ 2x_1+3x_2+2x_3=4 \end{cases}$ 该方程组有解.（非齐次方程组有解 ⟺ $R(A)=R(\bar{A})$）

而 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$

可见，当 $a=2$ 时 $R(A)=R(B)$，才有解

解2: β可由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示 ⟺ $R(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=R(\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\beta)$ ⟺

∵ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关，∴ $R(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=3$ ∴ $|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta|=0$ ⟹ $a=2$

2. $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关,

则① $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 的相关性. （$B=AK$）

与 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ 有关. 若行列式为0，则相关，不为0则无关. 此时为无关.

② $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3\cdots\alpha_n-\alpha_1$ 的相关性

与 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ 有关，此时行列式为0. 故上述向量组线性相关

③ $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots\alpha_n+\alpha_1$ 的相关性

与 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^{1+n}$ 有关 ⟹ $\begin{cases} 0 & n为偶数，相关 \\ 2 & n为奇数，无关. \end{cases}$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

3. 已知 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 线性无关

问：① α_1 能否由 $\alpha_2\alpha_3$ 线性表示 ② α_4 能否由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示

解：① $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 无关 $\Rightarrow$ $\alpha_2\alpha_3$ 无关，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相关 $\Rightarrow$ α_1 可以由 $\alpha_2\alpha_3$ 线性表示，且表示方式惟一

② 设 $\alpha_1=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3$

若 α_4 能由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示，设为

$$\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$$
$$=l_1k_1\alpha_2+l_1k_2\alpha_3+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$$
$$=(l_1k_1+l_2)\alpha_2+(l_1k_2+l_3)\alpha_3$$

即 α_4 可以由 $\alpha_2\alpha_3$ 线性表示，与题设矛盾，故 α_4 不能由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 表示.

4. $A_{n\times m}$，$B_{m\times n}$，$AB=E$，证 B 的列向量无关

证：$r(AB)=r(E)=n\le\min\{r(A),r(B)\}$

$\therefore r(B)\ge n$

又 B 为 $m\times n$ 阵 $\therefore r(B)\le n$ $\Rightarrow r(B)=n$ 即列向量无关.

5. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 都是 n 维列向量，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关，非0 α_4 与 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 正交

证：$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 线性无关

$a\cdot b$ 正交 $\Leftrightarrow a^Tb=b^Ta=0$

考察线性无关的概念

证：若 $\exists\ k_1k_2k_3k_4$ 满足

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$ (*)，左乘 α_4^T 得

$$\alpha_4^T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4)$$
$$=k_1\alpha_4^T\alpha_1+k_2\alpha_4^T\alpha_2+k_3\alpha_4^T\alpha_3+k_4\alpha_4^T\alpha_4$$
$$=k_4\alpha_4^T\alpha_4=k_4\|\alpha_4\|^2=0$$

$\because \alpha_4$ 非0 $\therefore k_4=0$. 代入(*)得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

又 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关 $\Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0$. 即 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 无关.

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

6. 求 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ 的最大线性无关向量组，并将其它向量用其表示.

解：
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -2 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（两矩阵各列依次为 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5$）

取 $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ 为最大线性无关向量组.

则 $\begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_4 \end{cases}$

考察：最大线性无关向量组的定义和实质；矩阵的行变换.

7. $\text{I} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$，$\text{II} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$，$\text{III} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5)$

$r(\text{I}) = r(\text{II}) = 3$，$r(\text{III}) = 4$. 证 $\alpha_5 - \alpha_4$ 与 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关

证1：反证

~~∵ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 相关 无关~~

若 $\alpha_5-\alpha_4$ 可以由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示，即 ∃ $k_1k_2k_3$ 满足

$\alpha_5 - \alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$ (*)

∵ $r(\text{I}) = 3 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 无关

$r(\text{II}) = 3 \Rightarrow \alpha_4$ 可以由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 表示且惟一，设 $\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$

代入 (*) 得

$\alpha_5 = (k_1+l_1)\alpha_1 + (k_2+l_2)\alpha_2 + (k_3+l_3)\alpha_3$

即 α_5 可以由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示，这与 $r(\text{III}) = 4$ 矛盾. 故假设错误. 得证

证2：直证

设 $k_1(\alpha_5-\alpha_4) + k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 + k_4\alpha_3 = 0$

再设 $\alpha_4 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$

$\Rightarrow$ 整理得

$k_1\alpha_5 + (k_2 - k_1l_1)\alpha_1 + (k_3 - k_1l_2)\alpha_2 + (k_4 - k_1l_3)\alpha_3 = 0$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

解得 $\begin{cases} k_1=0 \\ k_2-k_1 l_1=0 \\ k_3-k_1 l_2=0 \\ k_4-k_1 l_3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} k_1=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \\ k_4=0 \end{cases}$ ∴ 无关

证3：只要证 $r(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5-\gamma_4)=r(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5)=4$

即证 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5-\gamma_4)$ 与 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5)$ 等价

∵ $\gamma_4=l_1\gamma_1+l_2\gamma_2+l_3\gamma_3$

∴ $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5-\gamma_4)$ 可以通过列变换化为 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5)$

故等价.

考察：线性无关的定义，三种证法在根本上是一致的.

9. $\beta_1=(1,a_1,0,0)^T$，$\beta_2=(1,a_2,2,0)^T$ $\beta_3=(1,a_3,2,3)^T$ $\beta_4=(1,a_4,0,3)^T$

对 $\forall a_i\ (i=1,2,3,4)$ 正确的是：②

① $\beta_1\beta_2\beta_3$ 相关 ② $\beta_1\beta_2\beta_3$ 无关 ③ $\beta_1\beta_4$ 相关 ④ $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ 无关

解：$(\beta_1\ \beta_4)=\begin{pmatrix}1&1\\a_1&a_4\\0&0\\0&3\end{pmatrix}$ ∵ $\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}\neq0$ ∴ $r(\beta_1\beta_4)=2$ ∴ 无关 ③ ×

$(\beta_1\beta_2\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$ ∵ $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{vmatrix}\neq0$ ∴ $r(\beta_1\beta_2\beta_3)=3$ ∴ 无关 ② √ ① ×

$(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a_1&a_2&a_3&a_4\\0&2&2&0\\0&0&3&3\end{pmatrix}$ $\begin{cases} a_1=a_2=a_3=a_4 \text{时} \ r(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)<4 \text{，相关} \\ a_1a_2a_3a_4 \text{为其他值，秩可能为4，无关} \end{cases}$ ④ ×

考察：线性无关与列秩的关系. 列秩与行秩的等价

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

10. 设 $A_{m\times n}$，$r(A)=m<n$，E_m为单位阵。正确的是：③

① A的任何m个列向量无关：

A为 $\overset{m}{\boxed{\quad}}n$ 形状的矩阵，m< n，只有n个列向量无关，故×。

② A的任一个m阶子式都不为0

应该为至少有一个不为0。考察行列式的定义，故 ×

③ 若B满足BA=0，则B一定是0矩阵

$r(A)+r(B)\le m$ ∴ $r(B)\le 0$。 故 √

④ A经初等行变换后可化为 $(E_m, 0)$ 的形式

∵A不为方阵，更不可逆，还必须经列变化才能化为标准形，故 ×

11. $\xi_1=(1,0,2)^T$，$\xi_2=(0,1,-1)^T$ 都是 $AX=0$ 的解，则 A= ？

① $A=(-2,1,1)$ √ ② $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ ③ $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ ④ $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$

解：∵ $\xi_1\ \xi_2$ 线性无关，故 $r(A)=1$

考察：方程 $AX=0$ 的基础解系的个数与 $r(A)$ 的关系。（相加 = n）

12. $\beta_1\ \beta_2$ 是 $AX=b$ 的不同解，$\alpha_1\ \alpha_2$ 是 $AX=0$ 的基础解系，则 $AX=b$ 的通解：

① $\frac{\beta_1-\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)$ ② $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)$

③ $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)$ ④ $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)$

解：首先 $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$ 是特解。其次，$\alpha_1\ \alpha_2$ 无关，$\alpha_1,\ \alpha_1-\alpha_2$ 也无关（∵ $\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}\ne 0$）

对于④，$\beta_1-\beta_2$ 与 α_1 不一定无关

考察：已知一组向量线性无关，如何判断另一组是否无关。

考研论坛

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

13. $A_{4\times5}$，A行向量无关，则错误的是：　A为 5×4 形状的矩阵

① $A^Tx=0$ 只有0解；

$r(A)=4$，$r(A^T)=4$，列满秩，只有0解 ✓

② $A^TAx=0$ 有无穷解

$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=4$．　A^TA 为5×5，∴有无穷解 ✓

③ $\forall b$，$A^Tx=b$ 有惟一解

同① A^T 列满秩，但 A^T 为5行，5×4形状，可能加入一列b，使 $r(A)<r(B)=5$

∴ ×

④ $\forall b$　$Ax=b$ 有无穷解

$A_{4\times5}$，$(Ab)_{4\times6}$　$r(A)=r(A,b)=4$，有无穷解 ✓

考察：矩阵的秩与方程的解的关系．

$Ax=0$　$r(A)=n$，只有0解

$r(A)<n$，有非0解

$Ax=b$　$r(A)=r(A,b)=n$　有惟一解

$r(A)=r(A,b)<n$　有无穷解

若A为方阵　注意箭头方向

列秩与行秩的等价性．

14. A为m×n，以下正确的是 ②

① $Ax=0$ 只有0解，则 $Ax=b$ 有惟一解．

错误．∵若 $n<m$，A为 m×n 形状矩阵，加一列可能会 $r(A)<r(B)$，$Ax=b$ 无解

② A有一个n阶子式不为0，$Ax=0$ 只有0解

正确，A有一个n阶子式不为0 ⇒ $R(A)=n$，列满秩

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

③ $Ax=b$ 有惟一解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

错误，$Ax=b$ 有惟一解 $\Rightarrow r(A)=r(B)=n$

但反之不成立，见①

④ $m<n$，$Ax=b$ 有无穷解

错误，$m<n$，A为 $n \times m$ 形状矩阵，

若 $r(A)<m$，加一列b后，可能 $r(B)=m$，$r(A)\neq r(B)$ 无解。

15. 设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T$，$\alpha_3=(-1,b-2,a+2b)$，$\beta=(1,3,-3)^T$

① a,b为什么值时 β不能由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 线性表示。

② β可以由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 惟一表示

③ β可以由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 无穷表示。

解：实质是求 $r(A)$ $r(B)$ 的相互关系，求 $r(A)$ 可转化为求行列式 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|$

$|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=a(a-b)$，$r(B)\leq 3$

$a\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时，$r(A)=r(B)=3$，可以唯一表示

$a=0$ 或 $a=b$ 时，$|A|=0$：
- $a=0$，$r(A)\neq r(B)$，不能表示
- $a=b$，$r(A)=r(B)<3$，可以无穷表示

16. $$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1 \end{cases}$$ $(1,-1,1,-1)^T$ 是其中一个解

① 求方程组的全部解，并用基础解系表示

解：将 $(1,-1,1,-1)^T$ 代入方程组，得 $\lambda=\mu$。

增广矩阵 $B\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{pmatrix}$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$B\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

$\xi=(-\frac{1}{2},1,0,0)^T+k_1(1,-3,1,0)^T+k_2(-1,-2,0,2)^T\quad k_1,k_2\in R$

当$\lambda\neq\frac{1}{2}$时 $B\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2\lambda-1&\lambda-\frac{1}{2}&\lambda-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&2\lambda-1&\lambda-\frac{1}{2}&\lambda-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\xi=(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)^T+k(-2,1,-1,2)^T\quad k\in R$

② 求满足 $x_2=x_3$ 的全部解

解：在上述解果中令第二维与第三维的数据相等

当$\lambda=\frac{1}{2}$时，令 $1-3k_1-2k_2=k_1$ 得 $\xi=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0)^T+k_2(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2)^T$

当$\lambda\neq\frac{1}{2}$时 令 $-\frac{1}{2}+k=\frac{1}{2}-k$ 得 $k=\frac{1}{2}$ $\therefore\xi=(-1,0,0,0)^T$

17. ① $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 与 ② $\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$ 同解，求 a、b、c.

解：∵①与②同解，而$r(②)<3$ ∴①有无穷解 $\Rightarrow|①|=0$ 得 $a=2$

解出①的解为 $k(-1,-1,1)^T$，$k\in R$. 将$(-1,-1,1)$代入②得 $\begin{cases}b=1\\c=2\end{cases}$ $\begin{cases}b=0\\c=1\end{cases}$

经验证 只有 $\begin{cases}b=1\\c=2\end{cases}$ 才与①同解 ∴ $\begin{cases}a=2\\b=1\\c=2\end{cases}$

考点：两方程组同解的条件：~~[illegible]~~

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

18. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解. 求 a 及公共解

解1: ∵ 有公共解, ∴ 四个方程联立有解

非齐次方程组有解 $\Longleftrightarrow$ $r(A)=r(B)$. B 为增广矩阵

$$B\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}$$

当 $a=1$ 时, 公共解为 $x=k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $k\in R$

当 $a=2$ 时 公共解为 $x=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

解2: 计算第1个方程组 系数矩阵 的行列式

$|A|=(a-1)(a-2)$

$\begin{cases} a\neq1.\text{且 } a\neq2 \text{ 时. 第①个方程组0解, 不是②的解} \\ a=1 \text{ 时 } x=k(-1,0,1)^T \text{ 是②的解 } k\in R \\ a=2 \text{ 时 } x=k(0,-1,1)^T \text{ 代入②得 } k=-1 \ \therefore x=(0,1,-1)^T \text{ 是公共解} \end{cases}$

19. n 元线性方程组 $Ax=b$.

$$A=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & a^2 & 2a \end{bmatrix}$$

$x=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$ $b=(1,0,0\cdots0)^T$

① $|A|=(n+1)a^n$ ② a 为何值, $Ax=b$ 有唯一解 ③ 有无穷解 求通解

解: ① 归纳法

$n=1$ 时 $|A|=2a=(1+1)a^1$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

假设 $|A|_{n-1} = n a^{n-1}$ $(n \geq 2)$

则 $|A|_n = 2a \times |A|_{n-1} - a^2 |A|_{n-2}$

$= 2a \times n \times a^{n-1} - a^2 \times (n-1) a^{n-2}$

$= (n+1) a^n$

得证

① $|A| = 0$ 得 $a = 0$.

当 $a \neq 0$ 时. $R(A) = R(B) = n$. 有唯一解

② $a = 0$ 时 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $r(A) = n-1 = r(B)$ 有无穷解

$x = \underbrace{(0, 1, 0 \cdots 0)^T}_{Ax=b\text{的特解}} + \underbrace{K(1, 0, \cdots 0)^T}_{Ax=0\text{的通解}}$

第三部分	特征值与二次型	基础知识

1. 特征值与特征向量: $Ax = \lambda x$

① 特征向量不含0向量, 特征子空间 = 特征向量 ∪ 0向量

② $|A - \lambda I|$ 的多项式叫**特征多项式**

$|A - \lambda I| = 0$ 叫**特征方程**

③ 对于某一个特征值 λ_0, 求解方程 $(A - \lambda_0 I)x = 0$ 的所有**基础解系**

$x^1, x^2, \cdots x^{n-r}$ $(r(A - \lambda_0 I) = r)$;

该基础解系所有的线性组合. $K_1 x^1 + K_2 x^2 + \cdots + K_{n-r} x^{n-r}$ (K_i 为**任意**常数)

是 $(A - \lambda_0 I)x = 0$ 的 通解

考研论坛

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

该基础解系所有的非0线性组合 $k_1x^1+k_2x^2+\cdots+k_{n-r}x^{n-r}$ ($k_1,k_2,\cdots k_{n-r}$ 不全为0)

是A属于特征值 λ_0 的全部特征向量

注意：若求 λ_0 的特征子空间，则没有 ($k_1, k_2 \cdots k_{n-r}$ 不全为0) 这一要求

④ $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$；$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ = A的迹 $tr(A)$

⑤ A与 A^T 有相同的特征值.

⑥ 若 $r(A)=1$，则A的特征值是 $\lambda_1=\sum a_{ii}$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

例如 $A=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}$，则 $\lambda_1=6$，$\lambda_{2,3}=0$

⑦ 相似：$P^{-1}AP=B$　P可逆
合同：$P^TAP=B$　P可逆
} 两者都是等价　等价 ⟺ $R(A)=R(B)$

相似：有相同的特征多项式 ⟹ 有相同的特征值 ⟹ 有相同的行列式和迹 ⟹ 有相同的秩.

$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，并不是 $\lambda E-A=\lambda E-B$

并不是相同的特征向量

此外，还要注意：

A、B相似，并不是两者都相似于同一个对角阵，还必须具备对角化的条件.

可对角化 ⟺ 有n个线性无关的特征向量（重要）{ ① 有n个不同的特征值. ② 每个特征根的代数重数 = 几何重数

∴ 有相同的特征根且都可以对角化 ⟹ 相似于同一对角阵 ⟹ 两矩阵相似.

注：代数重数 = $|A-\lambda I|=0$ 中 λ_i 的重数

几何重数 = $(A-\lambda I)x=0$ 中 $n-R(\lambda_i E-A)$

一般地，属于不同特征值的特征向量必线性无关.

实对称矩阵，属于不同特征值的特征向量必正交

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

⑧ 实对称矩阵必可对角化.

又∵实对称阵属于不同特征值的特征向量已经正交了.

故求某正交阵 Q 使 $Q^{-1}AQ=D$ 时. 只需对同一个特征值下的特征向量做正交单位化即可，其他正做单位化.

若求可逆阵 Q 使 $Q^{-1}AQ=D$. 不用做正交单位化了.

注: 规范正交的对象是线性无关的向量

(例如: 基的规范正交化，基是线性无关的向量组)

规范正交的过程: 先正交化. 后单位化.

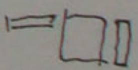
这一部分有点绕、多看课本. 认真体会.

⑨ 二次型: 区分以下定义

(1) $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的一个二次型是一个二次齐次多项式.

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

二次型的矩阵表示 $=[x_1 x_2 \cdots x_n]^T A\, [x_1 x_2 \cdots x_n]$



A 为 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 的二次型矩阵，A 为实对称矩阵.

(2) 二次型 $f(x_1 x_2 \cdots x_n)=x^TAx$，通过 $x=Cy$ 变换为标准型

$$f(y_1 y_2 \cdots y_n)=y^TDy=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

其中 C 为 $C^TAC=D$，C 为正交阵. D 为对角阵.

将二次型变为标准型，实质：将二次型矩阵对角化.

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

<3> 二次型的标准型有多种表示，但平方项系数中 +, -, 0 个数不变

+的个数：正惯性指数

-的个数：负惯性指数.

正惯性指数 - 负惯性指数 = 符号差.

<4> 二次型 $f=X^TAX$ 正定 的充要条件.

a) 对 $\forall X\neq 0$, $f=X^TAX>0$

b) 正惯性指数 $=n$

c) A合同于n阶单位阵：$\exists$ 可逆 C, $C^TAC=E$

d) A的n个特征值全为正数 $\Rightarrow |A|>0$

e) $\exists$ 可逆B. $A=B^TB$

f) A的各阶前主子矩阵的行列式均大于0.

<5> 二次型 $f=X^TAX$ 正定的必要条件

a) A主对角线元素 $a_{ii}>0$

b) $|A|>0$.

<6> 一般地，相似 $\Rightarrow$ 有相同特征值.

有相同特征值且都可以对角化 $\Rightarrow$ 相似

一个可对角化，另一个不可以 $\Rightarrow$ 不相似.

但，实对称阵必可对角化 $\Rightarrow$ 实对称阵 相似 $\overset{充要}{\Leftrightarrow}$ 有相同特征值.

<7> 正定、合同 $(B=C^TAC)$ 都是在实对称阵基础上才有的.

合同 $\Leftrightarrow$ 有相同的正负惯性指数 ← 惯性定理. ∴

实对称阵：相似 $\Leftrightarrow$ 有相同特征值

实对称阵：相似 $\Rightarrow$ 合同（合同 $\nLeftarrow$）

正定的首先条件：对称、可逆.

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

第三部分 特征值与二次型 例题分析

1、A为n阶实矩阵，P为n阶可逆阵，α是A关于λ的特征向量，则$(P^{-1}A^TP)^T$的属于λ的特征向量为（B）

A. $P^{-1}\alpha$　B. $P^T\alpha$　C. $P\alpha$　D. $(P^{-1})^T\alpha$

解：由题意：$A\alpha=\lambda\alpha$

而 $(P^{-1}A^TP)^T = P^TA(P^{-1})^T$

且 $P^TA(P^{-1})^T(P^T\alpha) = P^TA(P^{-1})^TP^T\alpha = P^TA\alpha = P^T\lambda\alpha = \lambda(P^T\alpha)$

故B正确。

2、已知4阶阵A满足$|3E+A|=0$，$AA^T=2E$，$|A|<0$，求A^*的一个特征值

解：考察 特征值的求法：解特征方程$|A-\lambda E|=0$

$AA^*=|A|E$　$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$　$A^*=A^{-1}|A|$

A的特征值$\lambda \Rightarrow A^{-1}$特征值$\frac{1}{\lambda} \Rightarrow A^*$特征值$\frac{|A|}{\lambda} \Rightarrow A^n$特征值$\lambda^n$

A的一个特征值为-3.

由 $AA^T=2E \Rightarrow |A|^2=2^4 \Rightarrow |A|=-4<0$.

$\therefore A^*$的一个特征值$=\frac{|A|}{\lambda}=\frac{4}{3}$

3、3阶矩阵A的逆矩阵的特征值为1, 2, 3，求A的代数余子式$A_{11}+A_{22}+A_{33}=$ 1

解：考察：A^*的定义和组成元素

$A_{11}+A_{22}+A_{33}$为A^*的迹 = A^*的特征值之和 $=\frac{|A|}{\lambda_1}+\frac{|A|}{\lambda_2}+\frac{|A|}{\lambda_3}$　(*)

A^{-1}的特征值为1, 2, 3 $\Rightarrow |A^{-1}|=1\times2\times3=6 \Rightarrow |A|=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ A的特征值为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

故 (*) $=\frac{1}{6}\times\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)=1$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

4. A与B相似. A的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$. 则 $|B^{-1}-E| = 24$

解: [考察]: 相似 ⇒ 特征值相同. 特征值 $\begin{cases}\text{之和} = \text{迹} \\ \text{之积} = \text{行列式}\end{cases}$

B的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ ⇒ B^{-1}的特征值 2.3.4.5 ⇒ $B^{-1}-E$的特征值 1.2.3.4

⇒ $|B^{-1}-E| = 1\times2\times3\times4 = 24$.

5. A为2×2矩阵. $\alpha_1\ \alpha_2$ 是线性无关的2维向量. $A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$. 求A的特征值

解: $A(\alpha_1,\alpha_2) = (A\alpha_1, A\alpha_2) = (\alpha_1\ \alpha_2)\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

又 α_1, α_2 线性无关. ∴ $[\alpha_1,\alpha_2]$ 可逆.

故 A与$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$相似. 有着相同的特征值 = $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$特征值 = 0, 1

[考察]: 可逆的定义、相似的定义: ∃可逆P. $P^{-1}AP = B$.

相似时有着相同的特征值.

[注]: 此题型很重要.

6. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 已知A有3个线性无关的特征向量. $\lambda=2$是A的二重特征根

求P^{-1}满足$P^{-1}AP$可对角化. ← [注]: 验证P的存在性.

解: ∵A有3个线性无关的特征向量. 故A可对角化

且特征根的代数重数 = 其几何重数.

∴ $r(A-2E) = 3-2 = 1$

解得 $\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$ 代入A 解得另一个特征根为 $\lambda=6$

7. A, B为3阶阵. 若 $AB=A-B$. $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ 是A的3个不同的特征根.

证: ① $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ 都 $\neq -1$. ② ∃P. 满足 $P^{-1}AP$. $P^{-1}BP$ 都为对角形.

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

证明：① 若A有一个特征根为 -1，则 $|A+E|=0$，即 $A+E$ 不可逆。

而 $AB=A-B$ 得

$(A+E)B=A$

$\Rightarrow (A+E)B+E=A+E$

$\Rightarrow (A+E)(E-B)=E$

即存在 $E-B$ 为 $A+E$ 的逆矩阵，这与 $A+E$ 不可逆矛盾。故 $\lambda_i \neq -1$，$i=1,2,3$

② ∵ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是A的3个不同的特征根，故A可对角化。

即∃可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

由 $AB=A-B$ 得 $A=(A+E)B$

∴ $P^{-1}AP=P^{-1}(A+E)BP$

$=P^{-1}(A+E)PP^{-1}BP$

∵ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$

∴ $P^{-1}(A+E)P=\begin{pmatrix}\lambda_1+1&&\\&\lambda_2+1&\\&&\lambda_3+1\end{pmatrix}$

∴ $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}&&\\&\frac{\lambda_2}{\lambda_2+1}&\\&&\frac{\lambda_3}{\lambda_3+1}\end{pmatrix}$ 得证。

8. 设A是3阶实对称阵，特征值为 $1,-1,-1$，其中1的特征向量为 $(1,1,1)^T$ 求A。

解：考查：实对称 ⇒ 不同特征值的特征向量必正交

设 -1 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$

则 $(x_1\ x_2\ x_3)(1,1,1)^T=0$

解方程 $x_1+x_2+x_3=0$ 得基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

∴ $k_2\xi_2+k_3\xi_3$ 为 -1 的特征向量 $k_2k_3\neq 0$，设 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。 注：什么是特征向量

则∃可逆阵 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$ 满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$，∴ $A=P\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}$

考研论坛

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

9. 设 $X=(1,1,2)^T$ 是 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&b\end{pmatrix}$ 的特征向量，求 a.b 的值，求所有特征向量

解：$AX=\lambda X$ 即 $\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda=5\\a=2\\b=3\end{cases}$

解 $|A-\lambda E|=0$ 得 $\lambda_2=\lambda_3=-3$.

或 $\begin{cases}0+0+b=\lambda+\lambda_2+\lambda_3\\ \lambda\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=|A|\end{cases}$ 也可以得到 $\lambda_2=\lambda_3=-3$. 再求解对应的特征向量. 等略

10. 设3阶实对称阵 A的秩为2. $\lambda_1=\lambda_2=6$. 是 A的二重特征根.

$\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(2,1,1)^T$, $\alpha_3=(-1,2,-3)^T$ 是A属于6的特征向量.

①求 A的另一个特征根及其特征向量 ②求A.

解：参考：秩 $<n \Rightarrow |A|<0 \Rightarrow \prod\lambda_i<0 \Rightarrow$ 0是其中一个特征根

① ∵ A的秩为2 ∴ $|A|=0$. 故0是其另一个特征根

取 $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$ 的一个最大线性无关组 α_1,α_2, 并设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 α.

由于实对称阵属于不同特征值的特征向量必正交.

∴ $\begin{cases}\alpha_1^T\alpha=0\\ \alpha_2^T\alpha=0\end{cases}$ 得 $\alpha=(-1,1,1)^T$ 为 $\lambda_3=0$ 的一个特征向量.

$k\alpha$ $(k\neq0)$ 为 $\lambda_3=0$ 的特征向量

＞ 注意 区别.

② $P=(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}$　$A=P\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}$

11. 设 A为3阶阵，$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ 是线性无关的3维向量，且 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$, $A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$

(I) 求B，使 $A(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)=(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)B$

(II) 求A的特征值

(III) 求可逆P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

解：(I) 由题意 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$

$\therefore B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$

(II) A与B相似（∵ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关．$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ 可逆）.

B的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$．$\lambda_3=4$．即为A的特征值．

(III) $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$

设 $M=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$，$AM=BM$．$M^{-1}AM=B$．左乘 Q^{-1}．右乘 Q．$\Rightarrow$

$Q^{-1}BQ=Q^{-1}M^{-1}AMQ=(MQ)^{-1}A(MQ)=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$

$\therefore P=MQ$ 为所求．

12、设3阶实对称阵A各行元素之和为3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$、$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是 $AX=0$ 的两解．

(I) 求A的特征值与特征向量

(II) 求正交阵Q和对角阵Λ，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$．

(III) 求A及 $(A-\frac{3}{2}E)^6$

解：(I) A各行元素之和为3 $\Rightarrow\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=3\\a_{21}+a_{22}+a_{23}=3\\a_{31}+a_{32}+a_{33}=3\end{cases}\Rightarrow A\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

故 $\lambda_1=3$ 是A的一个特征值．$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是其对应的一个特征向量．

$K_1\xi_1$ $(K_1\neq0)$ 是其对应的特征向量．

(II) 又 $\begin{cases}A\alpha_1=0\cdot\alpha_1\\A\alpha_2=0\cdot\alpha_2\end{cases}$ $\therefore\lambda_2=\lambda_3=0$ 是A的特征值．$\xi_2=\alpha_2$．$\xi_3=\alpha_3$ 是 $\lambda=0$ 的两个特征向量．$K_2\xi_2+K_3\xi_3$（K_2K_3 不全为0）是 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量．

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

(Ⅱ) 注：若求可逆阵 P 满足 $P^{-1}AP=\Lambda$，则 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$。

本题求正交阵 Q，满足 $Q^{-1}AQ=\Lambda$，则 $Q=(e_1\ e_2\ e_3)$

$e_1\ e_2\ e_3$ 是 $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ 规范正交化后的结果。

∵ A 为实对称阵，属于不同特征值的特征向量正交。

∴ e_1 为 ξ_1 的单位化结果

$e_2\ e_3$ 为 $\xi_2\ \xi_3$ 单位正交化的结果。

(Ⅲ) $A=Q\Lambda Q^{-1}$

$Q^{-1}(A-\frac{3}{2}E)Q$

$=Q^{-1}AQ-\frac{3}{2}E=\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&\frac{3}{2}&\\&&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

∴ $A-\frac{3}{2}E=Q\times\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}Q^{-1}$

$(A-\frac{3}{2}E)^6=Q\times(\frac{3}{2})^6\times\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}Q^{-1}=(\frac{3}{2})^6E$

13. 设3阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-2$，且 $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 属于 λ_1 的一个特征向量，$B=A^5-4A^3+E$

(Ⅰ) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值及特征向量。

(Ⅱ) 求 B。

解：(Ⅰ) 由题意得 B 的特征向量分别为 $\lambda_i^5-4\lambda_i^3+1$ $(i=1,2,3)$ 即 $-2.\ 1.\ 1.$

∵ $A\alpha_1=\alpha_1$

$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=\lambda_1^5\alpha_1-4\lambda_1^3\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$

∴ α_1 是 B 的一个特征向量，对应的特征值为 -2。

设 B 的特征值为 1 对应的特征向量为 $(x_1\ x_2\ x_3)^T=\alpha$。

又∵ A 为实对称阵 ⟹ B 为实对称阵。

∴ $\alpha^T\alpha_1=0$ 得 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 1 对应的一个特征向量。

bbs.kaoyan.com

浙江大学

故 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ (k_2, k_3 不全为0) 是1对应的全部特征向量

$k_1\alpha_1$ ($k_1\neq 0$) 是 -2 对应的全部特征向量.

(Ⅱ) $P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ $B=P\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$

14. 设A为3阶矩阵. $\alpha_1\alpha_2$ 分别为属于 $-1, 1$ 的特征向量. $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$

(Ⅰ) 证明 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 线性无关.

(Ⅱ) $P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 求 $P^{-1}AP$.

解: (Ⅰ) 设存在 $k_1\ k_2\ k_3$ 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ ①

等式两边同时左乘A 得 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3$

$=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_2+k_3\alpha_3$

$=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$ ②

联立 ① ② 两式得 $k_1=k_2=k_3=0$, 故 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关

(Ⅱ) $A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 即 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

15. 若3维列向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta=2$, 其中 α^T 为 α 转置, 则 $\beta\alpha^T$ 的非0特征值为 <u>2</u>

解: $\beta\alpha^T\beta=2\beta$

又解: 设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$. $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$\beta\alpha^T$ 的秩为1, 只有1个非0特征值, 2个0特征值.

$\sum\lambda_i=\lambda+0+0=$ 迹 $=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\alpha^T\beta=2.$ $\Rightarrow \lambda=2$.

由 结论: $\beta\alpha^T$ 的一个特征值为 $\alpha^T\beta$, 对应特征向量为 β. 其余都为0.

16. 设 $\alpha=(1,1,1)^T$. $\beta=(1,0,k)$, 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 则 $k=$ <u>2</u>

解1: $\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1&0&k\\1&0&k\\1&0&k\end{pmatrix}$. 相似矩阵 $\Rightarrow$ 特征值相同 $\Rightarrow$ 迹相同. $\therefore 1+k=3$ $k=2$

解2: $\alpha\beta^T$ 的特征根 $\beta^T\alpha$. 0. 0. $\beta^T\alpha=1+k=3$ $\therefore k=2$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

17. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 则A与B：合同且相似

解：考察：相似 $\Rightarrow$ 有相同特征值（$\nLeftarrow$）

有相同特征值且均可对角化 $\Rightarrow$ 相似.

一般来说，若两矩阵不相似 也有可能合同. 合同：有相同的秩，正惯性指数.

相似，合同都是等价. 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$

实对称：相似 $\Rightarrow$ 合同（$\nLeftarrow$），合同肯定是在实对称基础上.

结论：A矩阵的结构，有n-1个为0的特征值. 1个非0特征值=迹=1+1+1+1=4

取证明：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix} \xrightarrow[\text{简化行列式}]{\text{第一部分：矩阵}} [1-\lambda+(4-1)\times1][1-\lambda-1]^{4-1}=\lambda^3(\lambda-4)=0$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，$\lambda_4=4$. B的特征值也是如此.

B、A为实对称，可对角化 ∴A、B相似 $\Rightarrow$ A、B合同.

若A、B有一个不可对角化，但有相同特征值 $\Rightarrow$ 合同，但不相似.

18. 已知，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+ax_3^2-4x_2x_3$ 通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+cy_3^2$. 求a、c及所做的正交变换.

解：二次型 $f(x_1x_2x_3)$ 对应的二次型矩阵：$A=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&a&0\\-2&0&a\end{bmatrix}$.

由题意得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=$[redacted]，为A的特征值.

$$\therefore\begin{cases}2+a+a=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\c=5\end{cases}\quad\begin{cases}a=-1\\c=-3\end{cases}$$ 代入A得 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量.

正交变换 详略.

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

19. 设 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定阵. $A_m^T=A$，$B_n^T=B$. $C_{m\times n}$

① 计算 P^TDP. 其中 $P=\begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$

② 判断 $B=C^TA^{-1}C$ 是否为正定阵. 并证明结论.

解: $P^TDP=\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ (-A^{-1}C)^T & E_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -C^T(A^{-1})^T & E_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ 0 & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$

$-C^T(A^{-1})^T=-C^TA^{-1}$

② ∵ P可逆. ∴ D与 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$ 合同.

D正定 ⇒ $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$ 正定

D对称 ⇒ $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{bmatrix}$ 对称. (而且 $(B-C^TA^{-1}C)^T=B^T-C^TA^{-1}C=B-C^TA^{-1}C$ 也能得出它对称)

$\forall Z=(\underbrace{0,\cdots 0}_{m个})^T$ 及 $Y=(\underbrace{y_1,y_2\cdots y_n}_{n个})^T\neq 0$

$(Z^T,Y^T)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-C^TA^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ Y \end{pmatrix}>0 \Rightarrow Y^T(B-C^TA^{-1}C)Y>0$

结论: 正定的条件首先是对称和可逆.

∵ 正定矩阵 ⇐ 正定二次型 ⇐ 二次型 ⇐ 对称阵.

20. A.B均正定. 证明: AB正定 ⇔ A与B可交换.

证: "⇒" AB正定, 则AB对称

$(AB)^T=AB=B^TA^T=BA$.

"⇐" AB均正定. A.B可交换 得 $A^T=A$. $B^T=B$. $AB=BA$

bbs.kaoyan.com

考研论坛----考研人的精神家园

浙江大学

证明 AB正定:

① AB对称的证明.

$AB=BA=B^TA^T=(AB)^T$

② AB正定的证明:

设 $x\neq0$, $(AB)x=\lambda x$

$ABx=\lambda x$

$Bx=\lambda A^{-1}x$

$x^TBx=\lambda x^TA^{-1}x>0$ B正定, A^{-1}正定 ∴ $\lambda>0$

∴ AB的所有特征值都 >0. ∴正定.

21. 判断下列二次型是否为正定的

$A_n=\begin{vmatrix} n & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n & \cdots & \\ -1 & -1 & \cdots & n\end{vmatrix}$ 为 $f(x)=(n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 的二次型矩阵.

解: A_n的前k阶子式的行列式

$|A_k|=[n+(k-1)\times(-1)](n+1)^{k-1}$ ← 箭形行列式的公式

$=(n+1-k)(n+1)^{k-1}>0$ $1\leq n\leq k$

∴ A_n为正定阵. 二次型为正定二次型.

22. 结论: $\forall\vec{x}$, 若 $A\vec{x}=0$, 则 $A=0$

$\forall x$, 若 $x^TAx=0$ ⟺ $A^T=-A$
特别地, 若 $A=A^T$ (对称) } ⟹ $A=0$.

23. 等价 { 合同 ⟺ 有相同的秩, 相同的正惯性指数
相似 ⟹ 有相同的秩, 相同的特征值

实对称 { 合同 正定 : $f(x)=x^TAx$ 经 $x=Cy$后 化为标准形 $f(y)=y^T(C^TAC)y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots$ （C^TAC 为对角阵 D）

化为标准形, 即将实对称阵A对角化, 寻找正交阵C, 满足 $C^TAC=D$

bbs.kaoyan.com